Facultad de Informática de Madrid

LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

EXAMEN FINAL - JULIO 2015

Apellidos: SOLUCION Nombre:

**Ejercicio 1:**

Dado el lenguaje regular L = $(10)^*1$.

a) Construir una gramática lineal por la derecha (GLD) que genere dicho lenguaje.

b) Construir una gramática lineal por la izquierda (GLI) que genere dicho lenguaje.

**25 minutos**

---

a) $GLD = (\Sigma_T = \{0,1\}, \Sigma_N = \{A,B\}, A, P_1)$

$P_1 = \{A ::= 1B \mid 1, \; B ::= 0A\}$

b) $GLI = (\Sigma_T = \{0,1\}, \Sigma_N = \{A,B\}, A, P_2)$

$P_2 = \{A ::= B1 \mid 1, \; B ::= A0\}$

Facultad de Informática de Madrid

LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

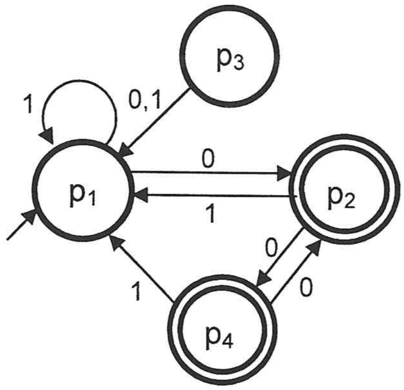
EXAMEN FINAL - JULIO 2015

Apellidos: SOLUCION Nombre:

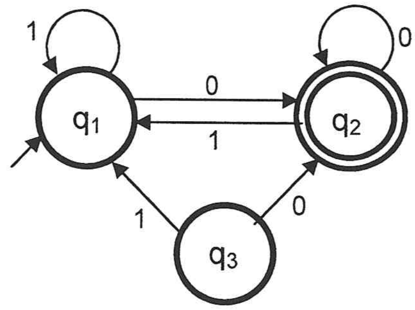
## Ejercicio 2:

Demostrar si son o no equivalentes los autómatas finitos $A_1$ y $A_2$ por medio de la suma directa de autómatas.

$A_1 \equiv$




$A_2 \equiv$




**30 minutos**

| f | 0 | 1 |
| --- | --- | --- |
| $\to p_1$ | | |
| $p_2$ | | |
| $p_3$ | | |
| $p_4$ | | |
| $q_1$ | | |
| $q_2$ | | |
| $q_3$ | | |

$P_0 = \{A = \{p_2, p_4, q_2\}, B = \{q_1, p_1, p_3, q_3\}\}$

$f(p_2,0) = p_4 \in A$ | $f(p_2,1) = p_1 \in B$

$f(p_4,0) = p_2 \in A$ | $f(p_4,1) = p_1 \in B$

$f(p_2,0) = p_4 \in A$ | $f(p_2,1) = p_1 \in B$

$f(q_2,0) = q_2 \in A$ | $f(q_2,1) = q_1 \in B$

$f(p_1,0) = p_2 \in A$ $\Rightarrow$ $p_1$ distinta clase que $p_3$

$f(p_3,0) = p_1 \in B$

$f(p_1,0) = p_2 \in A$ | $f(p_1,1) = p_1 \in B$

$f(q_1,0) = q_2 \in A$ | $f(q_1,1) = q_1 \in B$

$P_1 = \{A_2 = \{p_2, p_4, q_2\}, B_2 = \{p_1, q_1, q_3\}, C_2 = \{p_3\}\}$

$P_1 = P_2 \Rightarrow Q_1 \cup Q_2/E = P_1$. Como $p_1$ y $q_1$ estados iniciales están en la misma clase $B_2$ de $Q_1 \cup Q_2/E \Longrightarrow A_1 \equiv A_2$

Apellidos: **SOLUCIÓN** Nombre:

---

## Ejercicio 3:

Sea el autómata a pila AP = $\{ \Sigma , \Gamma , Q , q_0 , A_0 , f , \varnothing \}$, con $\Sigma = \{ 1 , 2 \}$, $\Gamma = \{ A_0 , A \}$, $Q = \{ q_0 , q_1 \}$ y $f$ definida mediante los 5 movimientos siguientes:

① $f( q_0 , 1 , A_0 ) = ( q_0 , AA_0 )$

② $f( q_0 , 1 , A ) = ( q_0 , AA )$

③ $f( q_0 , 2 , A ) = ( q_1 , A )$

④ $f( q_1 , 2 , A ) = ( q_1 , \lambda )$

⑤ $f( q_1 , \lambda , A_0 ) = ( q_0 , \lambda )$

a) Construir a partir del AP, utilizando el algoritmo correspondiente, una gramática G que genere el mismo lenguaje y depurarla (7 puntos).

b) Comprobar la generación en G y aceptación en AP de las palabras 112 y 11222 (2 puntos).

c) ¿Qué lenguaje reconoce el AP y genera G? (1 punto).

**30 minutos**

---

Se pide construir una G que genere el lenguaje aceptado por AP:

AP = $\{ \{ 1 , 2 \} , \{ A , A_0 \} , \{ q_0 , q_1 \} , A_0 , q_0 , f , \varnothing \}$

G = $\{ \Sigma_T , \Sigma_N , P , S \}$, $\Sigma_T = \Sigma$ del AP , $\Sigma_N = \{ S \} \cup \{ [ q \ A \ p ] \ / \ q, p \in Q , A \in \Gamma \}$, S = Axioma

<u>ALGORITMO</u> (para obtener las producciones $P$ de G):

1. $S ::= [ q_0 \ A_0 \ p ] , \forall p \in Q$
2. $[ q \ A \ q_{m+1} ] ::= a [ q_1 \ B_1 \ q_2 ] , [ q_2 \ B_2 \ q_3 ] , [ q_3 \ B_3 \ q_4 ] , \ldots\ldots , [ q_m \ B_m \ q_{m+1} ]$
   Todas las posibles secuencias que llevan de $q_1$ a $q_{m+1}$ para cada símbolo $B_1, B_2, B_3, \ldots , B_m$ introducido en la pila. $\forall\, q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots , q_m, q_{m+1} \in Q$; $A, B_1, B_2, B_3, \ldots , B_m \in \Gamma$; $a \in \Sigma \cup \{ \lambda \}$
   Si los movimientos de la función de transición $f$ son del tipo: $( q_1 \ B_1B_2B_3...B_m ) \in f( q \ a \ A )$
3. Si m = 0, es decir, si no se introduce nada en la pila:
   $[ q \ A \ q_i ] ::= a \quad , \forall q_i \in Q$
   Si los movimientos de la función de transición $f$ son del tipo: $( q_i \ \lambda ) \in f( q \ a \ A )$

$S ::= \underset{A}{[ q_0 \ A_0 \ q_0 ]} \mid \underset{B}{[ q_0 \ A_0 \ q_1 ]}$

1º movimiento: $\underset{A}{[ q_0 \ A_0 \ q_0 ]} ::= 1 \underset{C}{[ q_0 \ A \ q_0 ]} \underset{A}{[ q_0 \ A_0 \ q_0 ]} \mid 1 \underset{D}{[ q_0 \ A \ q_1 ]} \underset{F}{[ q_1 \ A_0 \ q_0 ]}$

$\underset{B}{[ q_0 \ A_0 \ q_1 ]} ::= 1 \underset{C}{[ q_0 \ A \ q_0 ]} \underset{B}{[ q_0 \ A_0 \ q_1 ]} \mid 1 \underset{D}{[ q_0 \ A \ q_1 ]} \underset{G}{[ q_1 \ A_0 \ q_1 ]}$

2º movimiento: $\underset{C}{[ q_0 \ A \ q_0 ]} ::= 1 \underset{C}{[ q_0 \ A \ q_0 ]} \underset{C}{[ q_0 \ A \ q_0 ]} \mid 1 \underset{D}{[ q_0 \ A \ q_1 ]} \underset{H}{[ q_1 \ A \ q_0 ]}$

$\underset{D}{[ q_0 \ A \ q_1 ]} ::= 1 \underset{C}{[ q_0 \ A \ q_0 ]} \underset{D}{[ q_0 \ A \ q_1 ]} \mid 1 \underset{D}{[ q_0 \ A \ q_1 ]} \underset{E}{[ q_1 \ A \ q_1 ]}$

**Facultad de Informática de Madrid**
**LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD**
**EXAMEN FINAL - JULIO 2015**

Apellidos: **SOLUCIÓN** Nombre:

3º movimiento: $[q_0\ \underset{D}{A}\ q_1] ::= 2\,[q_1\ \underset{E}{A}\ q_1]$

$[q_0\ \underset{C}{A}\ q_0] ::= 2\,[q_1\ \underset{H}{A}\ q_0]$

4º movimiento: $[q_1\ \underset{E}{A}\ q_1] ::= 2$

5º movimiento: $[q_1\ \underset{F}{A_0}\ q_0] ::= \lambda$

SE REDENOMINAN LAS TERNAS Y SE DEPURA LA GRAMÁTICA

| | |
|---|---|
| S : : = A \| B<br>A : : = ~~1CA~~ \| 1DF<br>B : : = ~~1CB~~ \| ~~1DG~~<br>C : : = ~~1CC~~ \| ~~1DH~~ \| ~~2H~~<br>D : : = ~~1CD~~ \| 1DE \| 2E<br>E : : = 2<br>F : : = λ | Eliminar símbolos no accesibles:<br>G y H (1DG, 1DH, 2H)<br>Eliminar reglas no generativas:<br>C : : = 1CC<br>Eliminar todas las afectadas por la regla anterior: 1CA, 1CB, 1CD |
| S : : = 1DF<br>D : : = 1DE \| 2E<br>~~E : : = 2~~<br>~~F : : = λ~~ | Se sustituyen en S y D las reglas:<br>E : : = 2<br>F : : = λ |
| S : : = 1D<br>D : : = 1D2 \| 22 | Producciones definitivas<br>GRAMÁTICA DEPURADA |

b)
Se prueban las 2 palabras: $112 \in L$ y $11222 \notin L$ en AP:

Palabra 112: $[q_0\ 112\ A_0] \vdash [q_0\ 12\ AA_0] \vdash [q_0\ 2\ AAA_0] \vdash [q_0\ \lambda\ AAA_0]$ **NO ACEPTA**

Palabra 11222: $[q_0\ 11222\ A_0] \vdash [q_0\ 1222\ AA_0] \vdash [q_0\ 222\ AAA_0] \vdash [q_1\ 22\ AAA_0] \vdash$

$[q_1\ 2\ AA_0] \vdash [q_1\ \lambda\ A_0] \vdash [q_1\ \lambda\ \lambda]$ **ACEPTA**

Se prueban las 2 palabras: $112 \in L$ y $11222 \notin L$ en la G:

Palabra 112: $S \rightarrow \underline{1D} \rightarrow 1\underline{1D2} \rightarrow$ (NO) ; $S \rightarrow \underline{1D} \rightarrow 1\underline{22} \rightarrow$ (NO)

Palabra 11222: $S \rightarrow \underline{1D} \rightarrow 1\underline{1D2} \rightarrow 11\underline{22}2$ (SI)

c)
El lenguaje que acepta el AP es: $L = \{\ 1^n\ 2^{n+1}\ /\ n \geq 1\ \}$

Facultad de Informática de Madrid

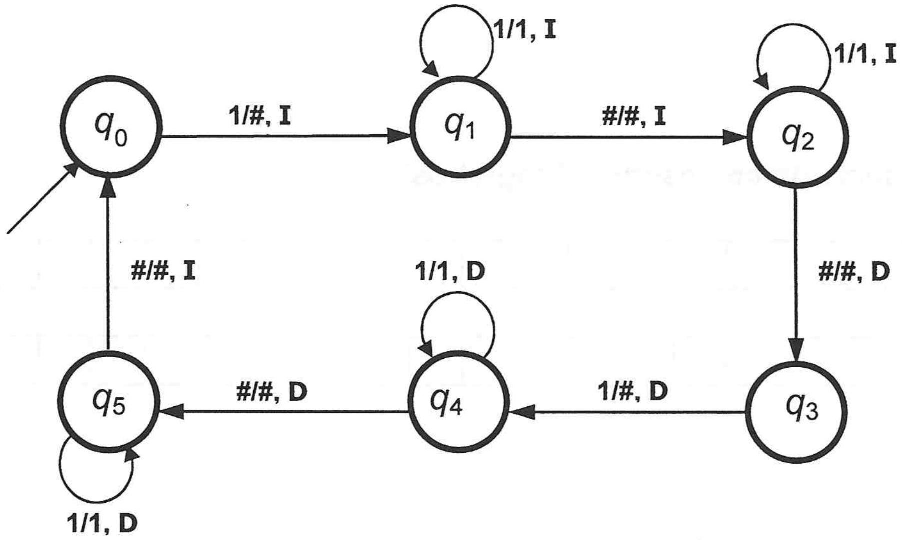
LENGUAJES FORMALES, AUTÓMATAS Y COMPUTABILIDAD

EXAMEN FINAL - JULIO 2015

Apellidos: SOLUCION Nombre:

## Ejercicio 4:

Sea la Máquina de Turing M definida según el siguiente grafo:




Y cuya configuración inicial es la siguiente: # x # y #   ($q_0$ bajo el último símbolo de y)

Donde $x$ e $y$ son dos números enteros positivos codificados en unario cumpliéndose que $x \geq y$. M inicialmente está en el estado $q_0$ leyendo el último 1 de $y$.

a) ¿Qué función aritmética sobre los números $x$ e $y$ calcula M?. Mostrar el funcionamiento de M cuando el contenido inicial de su cinta y la posición de su cabeza de lectura-escritura son las siguientes: (2,5 puntos)

a.1) # 1 1 1 1 1 # 1 1 1 #  $q_0$

a.2) # 1 1 # 1 1 #  $q_0$

b) Escribir (y describir brevemente) el contenido inicial de la cinta de la Máquina de Turing Universal cuando simula a la máquina M y ésta recibe como entrada los números del apartado a.1). (2,5 puntos). No es necesario escribir los 10 registros (con 3 de ellos es suficiente). Utilizar la siguiente codificación binaria:

$q_0 \equiv 000$; $q_1 \equiv 001$; $q_2 \equiv 010$, $q_3 \equiv 011$, $q_4 \equiv 100$, $q_5 \equiv 101$.

Desplazamiento a la izquierda. I ≡ 1; Desplazamiento a la derecha. D ≡ 0

c) Escribir (y describir brevemente) el contenido de la cinta de la Máquina de Turing Universal tras simular el primer movimiento que realiza la máquina M con la entrada del apartado a.1). (2,5 puntos).

d) Escribir (y describir brevemente) el contenido final de la cinta de la Máquina de Turing Universal cuando se para después de simular todos los movimientos que realiza la máquina M con la entrada del apartado a.1). (2,5 puntos).

**NOTA**: Todos los apartados se responderán en la carilla de atrás.

**30 minutos**

**SOLUCIONES** Función aritmética : $\boxed{x-y}$ RESTA — En cada ciclo borra un uno de y y un uno de x

**Apartado a)**

**a.1)** $11111\#11q_01 \vdash 11111\#1q_01 \vdash \cdots \vdash 11111q_1\#11 \vdash 1111q_21\#11 \vdash \cdots \vdash q_2\#11111\#11 \vdash q_311111\#11$
$q_41111\#11 \vdash \cdots \vdash 1111q_4\#11 \vdash 1111\#q_511 \vdash \cdots \vdash 1111\#11q_5\# \vdash 1111\#1q_01$ En este primer ciclo se ha borrado un 1 de y y un 1 de x. Segundo ciclo : $111\#q_01$ Tercer ciclo : $11q_0\#$ FIN

$5-3=2$

**a.2)** $11\#1q_01 \vdash \cdots \vdash 1\#q_01 \vdash \cdots \vdash q_0\#$ FIN

Dos ciclos borrando los unos de y y de x. $2-2=0$

**Apartado b) (es suficiente con escribir 3 registros)**

$q_0$ 1 $q_0$ 1 $q_1$ # I

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | * ‡ | 0 | 0 | 0 | 1 | ‡ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | ‡ | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | ‡ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | ‡ | - | ... | - |

*: Celda que inicialmente está leyendo M
Estado inicial del control de M : 000
Símbolo que inicialmente lee M : 1
→ Registro inicial: ‡0001‡

**Apartado c) (es suficiente con escribir sólo la parte de la cinta que cambia)**

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | * | 0 | ‡ | 0 | 0 | 1 | 1 | ‡ | . | . | . | | ... |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | ... |

1er movto de M : $f(q_0,1)=(q_1,\#,I)$
Donde estaba el * poner un 0. El * se recoloca en la celda de la izqda sobre un 1 que se guarda en el REG. inicial
En el REG. inicial el control pasa de $q_0$ a $q_1$ : 001

**Apartado d)**

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | * | 0 | 0 | 0 | ‡ | A | 0 | 0 | 0 | ‡ | A | A | A | B | A | A | B | A | B | ‡ |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | A's | | B's | | ‡ | - | - | - | ‡ | | | | | | | | | | | | ... |

M se para conteniendo en la cinta : $\underset{q_0}{\#11\#\#}$ En la MTU : 000011*000

MTU se para porque no hay ningún registro que empiece por $\underbrace{000}_{q_0}\underbrace{0}_{\#}$. Previamente se han marcado y rechazado todos los registros.